Pavel Obdržálek, MAII, úkol č. 3

$$\int \tan(x)dx \tag{1}$$

$\tan(x)$ si přepíšeme pomocí goniometrických funkcí na:

$$\int \tan(x)dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx$$

A provedeme substituci $\cos(x) = t$ $(-\sin(x)dx = dt)$:

$$\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx = \int \frac{-1}{t}dt$$

Zintegrujeme pomocí známého vzorce:

$$-\int \frac{1}{t}dt = -\log(t) + c$$

A resubstituujeme:

$$-\log(t) + c = -\log(\cos(x)) + c$$

$$\int \frac{x^{99}}{x^{50}+1}dx \tag{2}$$

Zlomek si přepíšeme a provedeme substituci $x^{50} = a$ $(50x^{49}dx = da)$:

$$\int \frac{x^{99}}{x^{50}+1}dx = \int \frac{x^{50}\cdot x^{49}}{x^{50}+1}dx = \frac{1}{50}\int \frac{a\cdot x^{49}}{(a+1)\cdot x^{49}}da = \frac{1}{50}\int \frac{a}{a+1}da$$

Čitatele vydělíme jmenovatelem a dostáváme:

$$\frac{1}{50}\int \frac{a}{a+1}da = \frac{1}{50}\int 1 - \frac{1}{a+1}da = \frac{1}{50}\int 1da - \frac{1}{50}\int \frac{1}{a+1}da$$

Provedeme substituci $a + 1 = b$ $(da = db)$:

$$\frac{1}{50}\int 1da - \frac{1}{50}\int \frac{1}{a+1}da = \frac{1}{50}\int 1da - \frac{1}{50}\int \frac{1}{b}db$$

Pomocí známých vzorců zintegrujeme:

$$\frac{1}{50}\int 1da - \frac{1}{50}\int \frac{1}{b}db = \frac{1}{50}a - \frac{1}{50}\log(b) + c$$

A resubstituujeme:

$$\frac{1}{50}a - \frac{1}{50}\log(a+1) + c = \frac{x^{50}}{50} - \frac{\log(x^{50}+1)}{50} + c$$

$$\int \frac{-2x^2+6x+8}{x^4-4x+3}dx \tag{3}$$

Pro rozdělení na jednotlivé parciální zlomky musíme zjistit jejich jmenovatele Hornerovým schematem. Získáme jmenovatele $x-1$, $(x-1)^2$ a x^2+2x+3:

$$\frac{-2x^2+6x+8}{x^4-4x+3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+3}$$

Úpravou získáváme:

$$-2x^2+6x+8 = A(x-1)(x^2+2x+3) + B(x^2+2x+3) + (Cx+D)(x-1)^2$$

$$-2x^2+6x+8 = Ax^3+Ax^2+Ax-3A+Bx^2+2Bx+3B+Cx^3-2Cx^2+Cx+Dx^2-2Dx-D$$

$$-2x^2+6x+8 = x^3(A+C)+x^2(A+B-2C+D)+x(A+2B+C-2D)+(-3A+3B-D)$$

A odtud pak podle koeficientů:

0 = A + C
-2 = A + B - 2C + D
6 = A + 2B + C - 2D
8 = -3A + 3B - D

$$A=-1; B=2; C=1; D=-1$$

Tím získáváme integrál:

$$\int \frac{-2x^2+6x+8}{x^4-4x+3}dx = \int \frac{-1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{x-1}{x^2+2x+3}dx$$

Ten můžeme rozdělit na:

$$\int \frac{-1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{x-1}{x^2+2x+3}dx = -\int \frac{1}{x-1}dx + 2\int \frac{1}{(x-1)^2}dx + \int \frac{x-1}{x^2+2x+3}dx$$

Některé části umíme zintegrovat hned:

$$-\int \frac{1}{x-1}dx + 2\int \frac{1}{(x-1)^2}dx + \int \frac{x-1}{x^2+2x+3}dx = -\log(x-1) - \frac{2}{x-1} + \int \frac{x-1}{(x+1)^2+2}dx$$

Nyní provedeme substituci $x+1=p$ $(dx=dp)$:

$$-\log(x-1) - \frac{2}{x-1} + \int \frac{x-1}{(x+1)^2+2}dx = -\frac{2}{x-1} - \log(x-1) + \int \frac{p-2}{p^2+2}dp$$

Vydělením opět získáváme dva zlomky:

$$-\frac{2}{x-1} - \log(x-1) + \int \frac{p-2}{p^2+2}dp = -\frac{2}{x-1} - \log(x-1) - 2\int \frac{1}{p^2+2}dp + \int \frac{p}{p^2+2}dp$$

Substituujeme $p^2+2=q$ $(2pdp=dq)$:

$$-\frac{2}{x-1} - \log(x-1) - 2\int \frac{1}{p^2+2}dp + \int \frac{p}{p^2+2}dp = -\frac{2}{x-1} - \log(x-1) - 2\int \frac{1}{p^2+2}dp + \frac{1}{2}\int \frac{1}{q}dq$$

Odtud zintegrujeme:

$$-\frac{2}{x-1}-\log(x-1)-2\int\frac{1}{p^2+2}dp+\frac{1}{2}\int\frac{1}{u}du=-\frac{2}{x-1}-\log(x-1)+\frac{1}{2}\log(q)-2\int\frac{1}{p^2+2}dp$$

A potom resubstituujeme a upravíme:

$$-\frac{2}{x-1}-\log(x-1)+\frac{1}{2}\log(q)-2\int\frac{1}{p^2+2}dp=-\frac{2}{x-1}-\log(x-1)+\frac{1}{2}\log(p^2+2)-\int\frac{1}{\frac{p^2}{2}+1}dp$$

A substituujeme $\frac{p}{\sqrt{2}}=r$ $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}dp=dr\right)$:

$$-\frac{2}{x-1}-\log(x-1)+\frac{1}{2}\log(p^2+2)-\int\frac{1}{\frac{p^2}{2}+1}dp=-\frac{2}{x-1}-\log(x-1)+\frac{1}{2}\log(p^2+2)-\sqrt{2}\int\frac{1}{r^2+1}dr$$

Naposledy zintegrujeme:

$$-\frac{2}{x-1}-\log(x-1)+\frac{1}{2}\log(p^2+2)-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{1}{r^2+1}dr=-\frac{2}{x-1}-\log(x-1)+\frac{1}{2}\log(p^2+2)-\sqrt{2}\arctan(r)+c$$

A dvakrát resubstituujeme:

$$-\frac{2}{x-1}-\log(x-1)+\frac{1}{2}\log(p^2+2)-\sqrt{2}\arctan(r)+c=-\frac{2}{x-1}-\log(x-1)+\frac{1}{2}\log(p^2+2)-\sqrt{2}\arctan\left(\frac{p}{\sqrt{2}}\right)+c$$

$$=-\frac{2}{x-1}-\log(x-1)+\frac{1}{2}\log\left((x+1)^2+2\right)-\sqrt{2}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+c$$